
Outils numériques
TP3 : Les modules numpy, scipy et matplotlib

Il est recommandé de créer un dossier TP3 dans lequel vous enregistrerez un fichier Python par exercice.

Exercice 1 : Tableaux. Définir manuellement la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 12 \\ 9 & 8 & 19 & 1 \\ 6 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Extraire la première ligne, la troisième colonne et l'élément situé à la deuxième ligne et à la quatrième colonne de A .
2. Échanger les deuxième et troisième lignes de A .
3. Extraire la diagonale et les parties triangulaires et inférieure de A .
4. Définir une fonction qui prend comme paramètre un entier n puis renvoie la matrice

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Exercice 2 : Algèbre linéaire. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système linéaire $Ax = b$.

Exercice 3 : Graphiques de fonctions.

1. Représenter la fonction $x \mapsto \exp(-x^2/2)$ pour x entre -2 et 2 . Vous spécifierez une légende, un titre, une couleur et un style de ligne de votre choix.
2. Représenter la fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}$ sur le carré $[0, 1]^2$. Vous choisirez le type de contour et afficherez une colorbar.

Exercice 4 : Graphiques et résolution d'équations. On considère la fonction f , définie par $f(x) = x^3 - 4x + 1$.

1. Tracer la fonction f sur $[-5, 5]$ et visualiser graphiquement les trois zéros de la fonction.
2. Déterminer numériquement les trois zéros de f . On veillera, à chaque fois, à prendre un point initial « proche » de chaque zéro.

Exercice 5 : Graphiques de fonctions. On considère la fonction de Heaviside définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On propose l'implémentation suivante :

```
def H(x) :
    return (0 if x < 0 else 1)

print(f"H(3) = {H(3)}")
n = 10
x = np.linspace(-5,5,n)
print(f"x = {x}")
y = H(x)
print(f"y = {y}")
```

1. Écrire le code ci-dessus. Qu'obtient-on ? Expliquer puis trouver une correction à ce code, soit en modifiant la fonction $H()$, soit en définissant une autre fonction qui exploite la fonction $H()$.
2. Tracer la fonction H pour $n = 10, 20, 100, 1000$.

Exercice 6 : Graphiques de fonctions. On considère la fonction polynôme suivante :

$$S(x; n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

qui est une approximation de la fonction sinus : $\lim_{n \rightarrow \infty} S(x; n) = \sin(x)$.

1. Écrire une fonction $S(x, n)$ qui calcule $S(x; n)$.
2. Pour $n = 1, 5, 10, 12, 15$ et 20 , tracer sur un même graphe, la fonction sinus sur $[0, 4\pi]$ et $S(x; n)$.

Exercice 7 : Animations. L'objet de cet exercice est de générer une animation simple. On introduit un signal gaussien à l'instant initial $t = 0$ défini par $u_0(x) = \exp(-x^2)$. On considère ensuite la fonction $u(t, x) = u_0(x - at)$ où $a \in \mathbb{R}$. La fonction u est la solution exacte d'une équation aux dérivées partielles appelée **équation de transport**. La donnée initiale u_0 (ici une gaussienne) est transportée sans déformation à la vitesse a .

1. Implémenter les fonctions u_0 et u (on peut implémenter la fonction directement). La fonction u doit prendre en argument t, x et a .
2. Écrire ensuite le code suivant :

```
from matplotlib.animation import FuncAnimation, FFMpegWriter
a = 1
x = np.linspace(-5, 5, 500)
ts = np.arange(0, 8, 0.1)

fig, ax = plt.subplots()
line, = ax.plot(x, u(0, x, a))
ax.set_ylim(-0.5, 1.5)

def update(i):
    t = ts[i]
    line.set_ydata(u(t, x, a))
    ax.set_xlabel(f"t = {t:.1f}")
    return line,

ani = FuncAnimation(fig, update, frames=len(ts), interval=300, blit=True)

# Enregistrement en MP4 avec FFMPEG
writer = FFMpegWriter(fps=5)
ani.save("onde.mp4", writer=writer)
plt.show()
```

Ce code génère un fichier mpeg appelé `onde.mp4`.

3. Lancer l'animation (il faudra peut-être installer une application qui lit les fichiers mpeg).
4. Lancer l'animation pour $a = 1, 2, 5$ et $a = -1, -2$. Quelles sont vos conclusions ?